(٤) الإمتحان

وزارة التعليم العالي	الامتحان النهائي	الاسم :
جامعة البعث	لمقرر تحليل (٢)- السنة الأولى رياضيات	الدرجة ١٠٠
كلية العلوم	الدورة التكميلية لعام ٢٠١٥- ٢٠١٦	المدة ساعة ونصف

أجب عن الأسئلة التالية :

السؤال الأول (٣٨ درجة) : (١) مستخدماً طريقة المكاملة بالتجزئة أوجد القانون التدريجي المناسب لحساب التكامل :

$$I_n = \int sin^n x\, dx \qquad , n = 1,2,3,4,\dots$$

ثم استنتج التكامل : $I_4 = \int \sin^4 x\, dx$

(٢) أوجد التكامل الآتي :

$$I = \int \left[\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} + \frac{2+\sin x}{1+\cos x} + \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} \right] dx \quad , |x| \geq 1$$

السؤال الثاني (٣٦ درجة) : (أ) مستخدماً تحويلات أولر أوجد التكامل الآتي : $J = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-4}}$

(ب) أدرس تقارب أو تباعد التكاملين المعتلين الآتيين :

$$I_1 = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^{-x})} \qquad , \qquad I_2 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+x^2}$$

السؤال الثالث (٢٦درجة) : (أ) أوجد مساحة المنحني المغلق المعطى بالمعادلة :

$$r = a(1+\cos\theta) \quad , \quad a > 0 \ , 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

(ب) أوجد مساحة المنطقة المستوية المحدودة بالمنحنيين:

$$y_1 = x \quad , \quad y_2 = 2 - x^2$$

انتهت الأسئلة

استاذ المقرر

د. منير مخلوف

حمص في ٢٨ /٨/٢٠١٦ مع أطيب الأمنيات بالتوفيق والنجاح

Scanned by CamScanner

في الواقع لدينا :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} = \int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{2}\,dx =$$

6

$$= \frac{1}{2}\int \sqrt{x+1}\,dx - \frac{1}{2}\int \sqrt{x-1}\,dx = \frac{1}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}(x-1)$$

أيضاً فيما يخص التكامل :

$$\int \frac{2+\sin x}{1+\cos x}\,dx$$

نفرض أن : $t = \tan\frac{x}{2}$ ، ومنه يكون لدينا :

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad ; \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad ; \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

وبالتعويض في التكامل السابق نجد :

$$\int \frac{2+\sin x}{1+\cos x}\,dx = \int \frac{2(t^2+t+1)}{1+t^2}\,dt = 2\int dt + \int \frac{2t\,dt}{1+t^2} =$$

6

$$= 2t + \ln(1+t^2) + c_2 = 2\tan\left(\frac{x}{2}\right) + \ln\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right) + c_2$$

وبالنسبة للتكامل :

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$$

نلاحظ أنه يكتب بالصورة :

$$\int x^{-\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}dx$$

ومنه : $m = -\frac{1}{2}$; $n = \frac{1}{4}$ و $p = \frac{1}{3}$ وبالتالي :

$$\frac{m+1}{n} = 2$$

لذلك نفرض أن :

$$t = \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}} \Rightarrow x = (t^3-1)^4 \Rightarrow$$

$$dx = 12t^2(t^3-1)^3\,dt$$

وبالتعويض في التكامل المعطى نحصل على :

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} = 12\int (t^6-t^3)\,dt = \frac{12}{7}t^7 - 3t^4 + c_3 =$$

8

$$= \frac{3}{7}\left(1+\sqrt[4]{x}\right)\left(4\sqrt[4]{x}-3\right)\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}} + c_3$$

إذن :

$$I = \frac{1}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + 2\tan\frac{x}{2} + \ln\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right) +$$

$$+ \frac{3}{7}\left(1+\sqrt[4]{x}\right)\left(4\sqrt[4]{x}-3\right)\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}} + c$$

مكتبة المستقبل ٠٩٣٣٠٨٠٣٥٢/٣٦٤٤٧٨٦

Scanned by CamScanner

36

جواب السؤال الثاني: (أ) لحساب التكامل J نلاحظ أن $a=1>0$

$c=-4<0$

حيث ولا يكون معطى... كما أنه يوجد للثلاثي الحدود جذران حقيقيان مختلفان هما:

$x_1=-4$ و $x_2=+1$

وبالتالي نفرض أن:

$$\sqrt{x^2+3x-4}=\sqrt{(x+4)(x-1)}=t(x+4)\Rightarrow$$

$$t=\sqrt{\frac{x-1}{x+4}} \quad ; \quad dx=\frac{10t}{(1-t^2)^2}dt \quad ; \quad x=\frac{4t^2+1}{1-t^2}$$

/2

وبالتعويض نحصل على:

$$J=\int \frac{\frac{10t}{(1-t^2)^2}}{t\left(\frac{4t^2+1}{1-t^2}+4\right)}dt=2\int\frac{dt}{1-t^2}=\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+c \Rightarrow$$

$$J=\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+4}-\sqrt{x-1}}\right|+c$$

(ب) بالنسبة لتقارب أو تباعد التكامل المعتل I_1 نلاحظ أنه من أجل $x\geq 1$ لدينا:

/2

$$x^2(1+e^{-x})>x^2 \Rightarrow \frac{1}{x^2(1+e^{-x})}<\frac{1}{x^2} \quad ; \quad \forall x\geq 1$$

ولكن:

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to\infty}\int_1^b\frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^b=1$$

فهو متقارب

وبالتالي حسب اختبار المقارنة يكون التكامل I_1 متقارب أيضاً

أما بالنسبة للتكامل المعتل I_2 يوجد للدالة المكاملة نقطة شذوذ هي $x=0$

/2

وطالما أن:

$$\sqrt{x}+x^2>\sqrt{x} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}+x^2}<\frac{1}{\sqrt{x}}$$

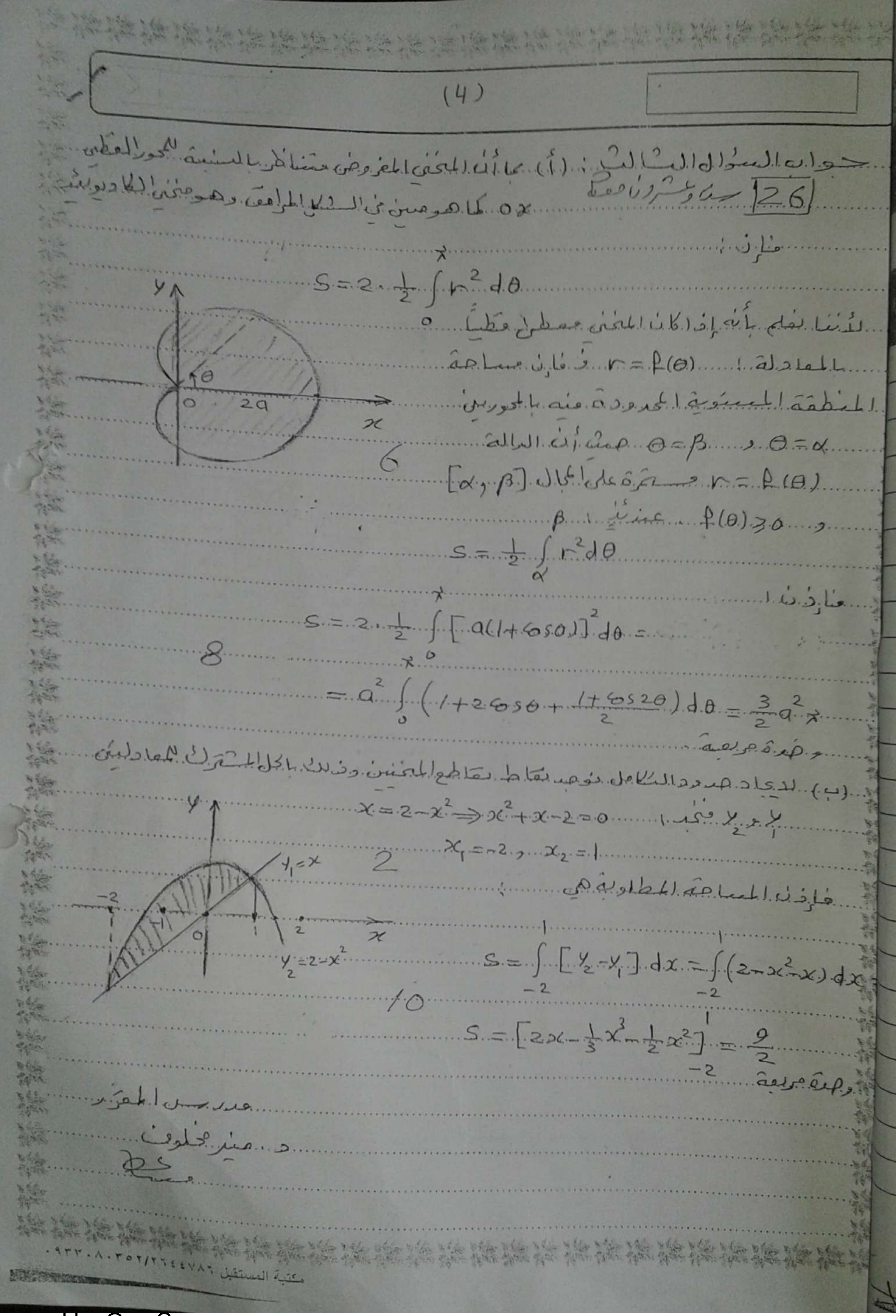
لكل $x\in\,]0,1]$

ولكن:

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}=\lim_{s\to 0^+}\int_s^1\frac{dx}{\sqrt{x}}=\lim_{s\to 0^+}\left[2\sqrt{x}\right]_s^1=2$$

فهو متقارب

وبالتالي حسب اختبار المقارنة نجد أن I_2 متقارب أيضاً



جواب السؤال الثالث: (أ) بما أن المنحني المفروض متناظر بالنسبة للمحور القطبي ox كما هو مبين في الشكل المرافق وهو منحني الكارديوئيد

26 ستة وعشرون درجة

فإن:

$$S = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi} r^2\, d\theta$$

لأننا نعلم بأنه إذا كان المنحني معطى قطبياً بالمعادلة: $r=f(\theta)$ فإن مساحة المنطقة المستوية المحدودة منه بالمحورين $\theta=\alpha$ و $\theta=\beta$ حيث أن الدالة $r=f(\theta)$ مستمرة على المجال $[\alpha,\beta]$ و $f(\theta)\geq 0$ عندئذ:

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2\, d\theta$$

فإذن:

$$S = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi}[a(1+\cos\theta)]^2\, d\theta =$$

$$= a^2\int_0^{\pi}\left(1+2\cos\theta+\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta = \frac{3}{2}a^2\pi$$

وحدة مربعة.

(ب) لإيجاد حدود التكامل نوجد نقاط تقاطع المنحنيين وذلك بالحل المشترك للمعادلتين y_1 و y_2 فنجد:

$$x = 2-x^2 \Rightarrow x^2+x-2=0$$

$$x_1=-2,\quad x_2=1$$

فإذن المساحة المطلوبة هي:

$$S=\int_{-2}^{1}[y_2-y_1]\,dx=\int_{-2}^{1}(2-x^2-x)\,dx$$

$$S=\left[2x-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^{1}=\frac{9}{2}$$

وحدة مربعة

مدرس المقرر

د. منير مخلوف

مكتبة المستقبل ٠٩٣٣٠٨٠٣٥٢/٢٦٤٤٧٨٦

Scanned by CamScanner